UNIVERSIDAD DE LA FRONTERA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y ESTADÍSTICA

Examen Calificación (Parte II)
Doctorado en ciencias mención matemática

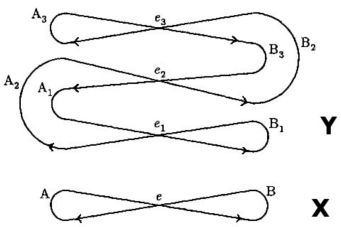
Nota. Cada pregunta es de desarrollo, justifique todos los pasos en su desarrollo.

1. (a) Sea F un cuerpo, $M = M_n(F)$ el anillo de matrices de orden n sobre F, y $G = GL_n(F)$ el grupo de elementos invertibles de M. Para un subconjunto X de M, sea
$$C_M(X) = \{T \in M : \ ST = TS \text{ para cada } S \in X\}.$$
Sea $C_G(X)$ definida análogamente.
   i. Demostrar que $C_M(X)$ es un F-subespacio vectorial de M para todo subconjunto X de M.
   ii. Suponga que $X_r \subseteq \cdots \subseteq X_2 \subseteq X_1$ es una cadena de subconjuntos de G tal que
$$C_1 \subsetneq C_2 \subsetneq \cdots \subsetneq C_r,$$
donde $C_i = C_G(X_i)$, $1 \leq i \leq r$. Demostrar que $r \leq n^2$.

   (b) Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre $\mathbb{Q}$ y $T : V \to V$ una transformación lineal con polinomio minimal $x^4 - x^2 - 2$ sobre $\mathbb{Q}$.
   i. Demostrar que n es par.
   ii. Sean $V_1 = \{v \in V : \ T^2(v) = -v\}$ y $V_2 = \{v \in V : \ T^2(v) = 2v\}$. Demostrar que ambos V_1 y V_2 son T-invariantes y que $V = V_1 \oplus V_2$.

2. Sea $\mathbb{R}_4[x]$ el espacio vectorial de polinomios en la variable x de grado menor o igual a 4. Considere el funcional
$$L : \mathbb{R}_4[x] \to \mathbb{R}, \ L(P) = \int_{-1}^{1} |P(x) - |x||^2 \, dx.$$
   (a) Si $P \in \mathbb{R}_4[x]$, definimos su parte par $P_{par} \in \mathbb{R}_4[x]$ como $P_{par}(x) = \frac{1}{2}(P(x) + P(-x))$. Demostrar que $L(P) \geq L(P_{par})$.
   (b) Determine el ínfimo del funcional L sobre $\mathbb{R}_4[x]$.

3. (a) Sean X e Y espacios representados en la figura:



y sea $p : Y \to X$ una aplicación continua que envía homeomórficamente cada arco A_i (respectivamente, B_i) sobre A (respectivamente, sobre B) según la orientación indicada.

i. Demostrar que p es un cubrimiento topológico.

ii. ¿Cual es el grupo deck de p ? Deduzca que p no es un cubrimiento de Galois.

iii. Construya un cubrimiento doble $q : \widetilde{Y} \to Y$ tal que $p \circ q : \widetilde{Y} \to X$ sea un cubrimiento de Galois.

(b) Sea $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Considere los conjuntos

$$A = S \cap \{x = 0\}, \quad B = S \cap \{y = 0\}, \quad C = S \cap \{z = 0\}.$$

Determine el grupo fundamental $\pi_1(X)$, donde

$$X = A \cup B \cup C.$$

4. (a) Sean $n, m \geq 1$ enteros positivos con máximo común divisor d. ¿ El ideal de $\mathbb{Q}[x]$ generado por $x^n - 1$ y $x^m - 1$ es un ideal principal ?

(b) Sea $K/\mathbb{Q}$ una extensión de Galois cuyo grupo de Galois es el grupo cuaterniones Q_8. Demostrar que K no es el cuerpo de descomposición de un polinomio de grado 4 en $\mathbb{Q}[x]$.

(c) Sea $L \subseteq \mathbb{C}$ una extensión de Galois finita de $\mathbb{Q}$ con grupo de Galois G. Suponga que G tiene orden impar. Demostrar que $L \subset \mathbb{R}$.

5. Sea la función f_0 continua en $[0, 1]$, sea $f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(y)\, dy$ para $n = 1, 2, \ldots$, y sea $M_n = \sup_{0 \leq x \leq 1} |f_n(x)|$.

(a) Demostrar que $|f_n(x)| \leq M_0 \frac{x^n}{n!}$ para $x \in [0, 1]$, $n = 1, 2, \ldots$.

(b) ¿Es verdad que, para cada $A > 1$, $A^n M_n \to 0$, cuando $n \to \infty$?